Aula 15

CORPO DE FRAÇÕES DE UM DOMÍNIO

META

Estabelecer o conceito de corpo de frações de um domínio.

OBJETIVOS

Identificar o corpo de um domínio.

Aplicar as propriedades do corpo de frações de um domínio na resolução de problemas.

PRÉ-REQUISITOS

O curso de Fundamentos de Matemática e as aulas 10, 12, e 14 deste curso.

INTRODUÇÃO

Caro aluno, finalmente vamos à ultima aula deste nosso primeiro curso em Estruturas Algébricas; espero que você esteja gostando. Nesta aula vamos mostrar que dado um domínio *D* é possível sempre estabelecer, a partir de *D*, um corpo que o tenha como subdomínio. Chamamos este corpo de corpo de frações de *D* e o indicamos por $Fr(D)$.

O primeiro exemplo de construção de um corpo de frações de um domínio é estudado, embora do modo informal, no ensino fundamental, quando definimos um racional como sendo um número que pode ser posto na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$.

O CONCEITO DE CORPO DE FRAÇÕES DE UM DOMÍNIO

Seja *D* um domínio qualquer. Vamos definir uma relação de equivalência no conjunto $D \times (D\backslash\{0\})$ do seguinte modo: dados $(a, b), (c, d) \in D \times (D\backslash\{0\})$, então $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $ad = bc$.

Notemos que $(a, b) \sim (a, b)$ e que $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$,trivialmente. Quanto à transitividade, suponhamos que $(a, b) \sim (c, d)$ e que $(c, d) \sim (e, f)$. Por definição, $ad = cb$ e $cf = de$. Multiplicando a primeira igualdade por f e a segunda por b, obtemos $adf = bcf$ e $bcf = bde$, donde temos $daf = dbe$. Logo $af = be$ e, portanto $(a, b) \sim (e, f)$. Denotemos a classe de equivalência de (a, b) por $\frac{a}{b}$, ou seja,

$$\frac{a}{b} = \{(c, d) \in D \times (D\backslash\{0\}); (c, d) \sim (a, b)\}$$

Indicamos o conjunto quociente de $D \times (D\backslash\{0\})$ módulo esta relação por $Fr(D)$.
Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Fr(D)$.

Definição 1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Definição 2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Notemos que, como a adição e a multiplicação foram acima definidas, devemos justificar que as mesmas não dependem dos representantes das classes. Com efeito, sejam $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$. Agora, notemos ainda que $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$ é equivalente a $b'd'(ad + bc) = bd(a'd' + b'c')$ ou equivalente a $b'd'ad + b'd'bc = bda'd' + bdb'c'$.

Como, por hipótese, $ab' = a'b$ e $cd' = c'd$, temos a ultima igualdade verificada e conseqüentemente a primeira.

A verificação da multiplicação é também simples e deixamos caro aluno, como atividade.

Notemos que o elemento $\frac{0}{1} \in Fr(D)$ é neutro para a adição:
$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1+b.0}{b.1} = \frac{0.b+1.a}{1.b} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, e que o elemento $\frac{1}{1} \in Fr(D) - \left\{\frac{0}{1}\right\}$ é neutro para a multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{1.a}{1.b} = \frac{a}{b}$.

Se, $\frac{0}{b} \neq \frac{0}{1}$ então, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ba}{ab} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{1}$, ou seja, todo elemento $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$ tem inverso multiplicativo.

Aliás, $(Fr(D), +, \cdot)$ tem estrutura de corpo. As demais propriedades são de fácil verificação e de uma rotina tediosa e se você, caro aluno quer fazê-las como atividade, vá em frente!

Agora, consideremos a aplicação $\psi: D \longrightarrow Fr(D)$ dada por $\psi(a) = \frac{a}{1}$.

Notemos que

$\psi(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \psi(a) + \psi(b)$, e que

$\psi(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \psi(a) \cdot \psi(b)$,

Logo ψ é um homomorfismo de anéis. Além disto, $\frac{a}{b} \in Ker\, \psi \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow Ker\, \psi = \{0\}$ ou seja, ψ é injetiva. Segue que $D \approx Im(\psi) \subset Fr(D)$. Identificando D por $Im(\psi)$ em $Fr(D)$, podemos assumir que D é um subdomínio do corpo $Fr(D)$.

Exemplo 1. $Fr(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

Exemplo 2. É de fácil verificação que o conjunto $\mathbb{Q}[i] = \{z = x + yi; x, y \in \mathbb{Q}\}$ munido das restrições das operações de adição e multiplicação usuais, é um subcorpo de $\mathbb{C}$. Afirmamos: O corpo de frações do domínio $\mathbb{Z}[i]$ (dos inteiros de Gauss) é a menos de isomorfismo, $\mathbb{Q}[i]$.

Para justificarmos esta afirmação, consideremos a aplicação $\psi: Fr(\mathbb{Z}[i]) \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$, dada por $\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \alpha . \beta^{-1}$. Notemos que se $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ em $Fr(\mathbb{Z}[i])$ então $\alpha\beta' = \alpha'\beta$ donde temos que em $\mathbb{Q}[i]$ $\alpha\beta^{-1} = \alpha'\beta'^{-1}$ donde temos que ψ não depende dos representantes das classes. Por outro lado, se $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'} \in Fr(\mathbb{Z}[i])$, então $\psi\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta'}\right) = \psi\left(\frac{\alpha\beta' + \alpha'\beta}{\beta\beta'}\right) = (\alpha\beta' + \alpha'\beta)(\beta\beta')^{-1} = (\alpha\beta')(\beta\beta')^{-1} + (\alpha'\beta)(\beta\beta')^{-1} = \alpha\beta^{-1} + \alpha'\beta'^{-1} = \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \psi\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)$

Facilmente, também se verifica que $\psi\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'}\right) = \psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \psi\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)$.

Portanto ψ é um homomorfismo de $Fr(\mathbb{Z}[i])$ em $\mathbb{Q}[i]$.

Agora, notemos que $\frac{\alpha}{\beta} \in Ker\, \psi \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} = 0$ em $\mathbb{Q}[i] \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow Ker\, \psi = \left\{\frac{0}{1}\right\}$, ou seja, ψ é injetiva.

Finalmente, seja $z = x + yi \in \mathbb{Q}[i]$. Então existem $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ tais que $x = ab^{-1}$ e $y = cd^{-1}$ de modo que

$z = ab^{-1} + cd^{-1}i = (ad + bci)(bd)^{-1}$

Fazendo $\alpha = ad + bci, \beta = bd \in \mathbb{Z}[i]$ temos que $\psi\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \alpha\beta^{-1} = z$ e, conseqüentemente, ψ é sobrejetiva.

Concluímos então que ψ é um isomorfismo de $Fr(\mathbb{Z}[i])$ em $\mathbb{Q}[i]$.

Afirmamos simplesmente que $\mathbb{Q}[i]$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}[i]$.

RESUMO

Nesta aula, dado um domínio *D*, usando uma relação de equivalência em $D \times (D \backslash \{0\})$, construímos um corpo, dependendo apenas de *D*, chamado o corpo de frações de *D*, corpo este que contém um subdomínio isomorfo a *D* que, tecnicamente, é conveniente identificá-lo como sendo o próprio *D*.

ATIVIDADES

1. Considere o subdomínio de $\mathbb{R}, D = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{\alpha = a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Identifique o subcorpo de $\mathbb{R}$ que, a menos de isomorfismo, é $Fr(D)$.
2. Seja *D* um domínio e $L = Fr(D)$. Se K é um corpo tal que $D \subset K = L$, prove que $K = L$.
3. Se o domínio *D* é um corpo, prove que $D = Fr(D)$.
4. Assumindo a conhecida relação de ordem total " $\leq$ " em $\mathbb{Z}$, estabeleça em $\mathbb{Q}$ uma ordem total " $\leq$ " da qual " $\leq$ " em $\mathbb{Z}$ é uma restrição.
5. Identifique o subcorpo de $\mathbb{C}$ que é o corpo de frações de $\mathbb{Z}[\omega]$. $\left(\omega = cos\frac{2\pi}{3} + i\ sen\frac{2\pi}{3}\right)$.

COMENTÁRIO DAS ATIVIDADES

Nas atividades 1 e 5, você deve ter imitado o segundo exemplo. Na quinta, se você percebeu que $\overline{\omega} = \omega^2$ e que $|c + d\omega|^2 = c^2 - cd + d^2$ você deve ter reduzido o seu trabalho.

Na segunda atividade, basta notar que se $z \in K$, então $z \in L$. Costumamos interpretar esta atividade dizendo que $Fr(D)$ é o menor subcorpo que contém *D*.

Na terceira atividade, você deve ter notado que a imagem do homomorfismo $\psi: D \longrightarrow Fr(D)$ dado por $\psi(a) = \frac{a}{1}$ é um subcorpo de $Fr(D)$ e aplicando o exercício anterior.

Na quarta atividade, você deve ter usado fortemente o fato de que para quaisquer dois racionais r e r' não negativos existem $a, b, d \in \mathbb{Z}, d > 0$ tais que $r = \frac{a}{d}$ e $r' = \frac{b}{d}$.

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, Adilson. Introdução à álgebra. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 194 p. (Projeto Euclides) ISBN.

HUNGERFORD, Thomas W. Abstract algebra: an introduction. 2nd. ed. Austrália: Thomson Learning, ©1997.